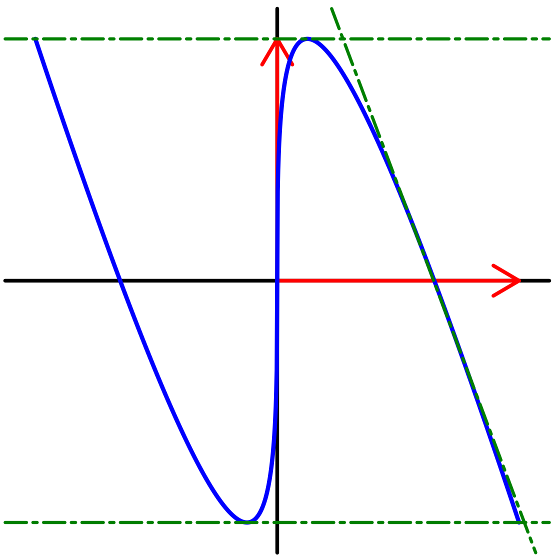
Réponses du devoir surveillé de Mathématiques n°4

Exercice 1 (étude d'une courbe paramétrée)

1. On a $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ donc la courbe est symétrique par rapport à l'origine.
2. $\vec{v}(t)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3(\cos t)(\sin t)^2 \\ 3\cos(3t) \end{pmatrix}$.
3. $\vec{v}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{9}{8} \\ -3 \end{pmatrix}$ et est non nul, la courbe admet une tangente au point de paramètre $t = \dfrac{\pi}{3}$ d'équation cartésienne $8x + 3y = 3\sqrt{3}$.
4. On étudie sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$ par $2\pi-$périodicité, on peut restreindre l'étude à l'intervalle $[0;\pi]$ en complétant par symétrie centrale puis on remarque que $x(\pi - t) = x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$ donc on peut réduire l'étude à l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
5.

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$+$	$\vert$	$+$	0
$y'(t)$		$+$	0	$-$	0
$x(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\nearrow$	1
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

6.



Exercice 2 (cercle principal d'une ellipse)

1. $\mathcal{T} : \dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1.$
2. Si $x_0 \neq 0$, la tangente $\mathcal{T}$ et l'axe focal de l'ellipse $\mathcal{E}$ se croisent au point $I\left(\dfrac{a^2}{x_0};0\right)$.
3. (a) Le quadrilatère OPM_0F est un parallélogramme d'où $OP^2 = M_0F^2 = (c-0)^2 + (b-0)^2 = a^2$.

   (b) On a $IO^2 = \dfrac{a^4}{x_0^2}$, $IF^2 = \left(c - \dfrac{a^2}{x_0}\right)^2$ et $M_0F^2 = (c-x_0)^2 + y_0^2 = (c-x_0)^2 + b^2\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right) = \left(\dfrac{c}{a}x_0 - a\right)^2$, on en déduit $OP^2 = \dfrac{IO^2 \times M_0F^2}{IF^2} = a^2$.

   (c) Le point P appartient au cercle de centre O et de rayon $|a|$.

Exercice 3 (suite arithmético-géométrique)

1. $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = 8$, $u_3 = 26$ et $u_4 = 80$.
2. Si a $a = 1$ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3 d'où $u_n = 3^n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1) - (n+1).$

Exercice 4 (calcul de sommes)

1. On a $f'(x) = n(x+1)^{n-1}$ si $n > 0$, $f'(x) = 0$ si $n = 0$ et $f''(x) = n(n-1)(x+1)^{n-2}$ si $n > 1$ et $f''(x) = 0$ si $n = 0$ ou $n = 1$.
2. On a $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} x^k$.

   De plus $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k \binom{n}{k} x^{k-1}$ pour $n > 0$ et $f''(x) = \displaystyle\sum_{k=2}^{k=n} k(k-1) \binom{n}{k} x^{k-2}$ pour $n > 1$.
3. On a $f(1) = S_0 = 2^n$.
4. Pour $n > 0$, on a $f'(1) = S_1 = n2^{n-1}$ et la formule obtenue est également valide pour $n = 0$.
5. Pour $n > 1$, on a $f''(1) = (S_2 - n) - (S_1 - n) = S_2 - n2^{n-1}$ d'où $S_2 = (n^2 + n)2^{n-2}$ et la formule obtenue est également valide pour $n = 0$ et $n = 1$.